حل عددی معادلات انتگرالی

مثال ۱:

$$y'(t)+2y+\int_0^t y(\lambda)\,d\lambda=0 \qquad y(0)=1 \qquad \begin{cases} 0<t<1\,s \\ h=0.1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{y(0+0.1)}{0.1}+2y(0)+\int_0^{\lambda} y(\lambda)\,d\lambda=0$$

$$\Rightarrow \frac{y(0.1)+1}{0.1}+2+\frac{y(0)+y(0.1)}{0.1}=0 \qquad \Rightarrow y(0.1)=-1.1$$

مثال ۲:

$$y''+y'=\cos t+\int_0^t y'(\lambda)\sin(t-\lambda)\,d\lambda \qquad \begin{matrix} y(0)=0 & h=0.1 \\ y(0)=0 & 0<t<1\,s \end{matrix}$$

$$\frac{y(t+2)-2y(t+h)+y(t)}{h^2}+\frac{y(t+h)-y(t)}{h}=$$

$$\cos t+\int_0^t \frac{y(h+\lambda)-y(h)}{h}\times\sin(t-\lambda)\,d\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{y(0+0.2)-2y(0+\lambda)+y(0)}{h^2}+\frac{y(0+0.1)-y(0)}{0.1}-\cos 0+\cancel{\int_0^0}=0$$

$$\Rightarrow y(0.2)=10.1$$

تعریف :

۱ – معادلات انتگرالی : معادلاتی هستند که تابع مجهول زیر علامت انتگرالی می باشد .

مثال :

$$y(t) = \sin 2t + \int y(\lambda)\sin 2(t-\lambda)d\lambda$$

۲ – معادلات دیفرانسیل انتگرالی : معادلات انتگرالی هستند که شامل مشتقات تابع مجهول نیز می باشد .

مثال :

$$y'' + y' = Cost + \int y'(\lambda)\sin(t-\lambda)d\lambda$$

برای حل این نوع معادلات از قضیه کانولوشن استفاده می کنیم .

یاد آوری :

کانولوشن دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ که با نماد $(f*y)(t)$ نشان داده می شود عبارت است از

$$(f*g)(t) = \int f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda$$

کانولوشن دارای خواص زیر است .

۱ – خاصیت جابجایی $f*g = g*f$

۲ – خاصیت توزیع پذیری $f*(g+h) = (f*g)+(f*h)$

۳ – خاصیت انجمنی $f*(g*h) = (f*g)*h$

٤ – $f*0 = 0*f = 0$

٥ – $f*(cg) = (cf)*g = c(f*g)$

اما در حالت کلی $1*f = f$ نیست و $f*f \geq 0$ ممکن است نباشد .

مثال : اگر $f(t) = \cos t$ باشد $(f*f)(t)$ را پیدا کنید .

حل :

$$(f*f)(t) = \int \cos\lambda\cos(t-\lambda)d\lambda$$

$$= \tfrac{1}{2}\int[\cos t + \cos(2\lambda - t)]d\lambda^{1}$$

$$\tfrac{1}{2}\lambda\cos t + \tfrac{1}{4}\sin(2\lambda - t)\Big|_0^t =$$

$$\tfrac{1}{2}t\cos t + \tfrac{1}{4}\sin t - 0 + \tfrac{1}{4}\sin - t$$

$$= \tfrac{1}{2}[t\cos t + \sin t]$$

1

$$\cos acob = \tfrac{1}{2}[\cos(a+b)\cos(a-b)]$$

۱

بعنوان مثال برای $t=\pi$ مقدار عبارت بالا برابر با $-\frac{\pi}{2}$ می باشد که منفی است یعنی $(f*f)\geq 0$ پس همانطور که گفتیم برای حل معادلات انتگرالی و معادلات دیفرانسیل انتگرالی از قضیه استفاده می کنیم .

مثال ۱ : معادله انتگرالی زیر را حل کنید .

$$y(t)=\sin 2t+\int y(\lambda)\sin 2(t-\lambda)d\lambda$$

حل : از طرفین لاپلاس می گیریم .

$$Ly=L\sin 2t+L(\int y(\lambda)\sin 2(t-\lambda)d\lambda)\Rightarrow$$

$$Ly=\frac{2}{s^2+4}+L(y*\sin 2t)$$ [۲]

$$Ly=\frac{2}{s^2+4}+Ly.L\sin 2t\rightarrow Ly=\frac{2}{s^2+4}+\frac{2}{s^2+4}Ly\rightarrow$$ [۳]

$$Ly(1-\frac{2}{s^2+4})=\frac{2}{s^2+4}\rightarrow Ly(\frac{s^2+4-2}{s^2+4})=\frac{2}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow Ly(\frac{s^2+2}{s^2+4})=\frac{2}{s^2+4}\Rightarrow Ly=\frac{2/s^2+4}{s^2+2/s^2+4}=\frac{2}{s^2+2}$$

$$\Rightarrow y=L^{-1}(\frac{2}{s^2+2})=L^{-1}(\frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{s^2+2})=\sqrt{2}L^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{s^2+2})\Rightarrow y=\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$$ [۴]

مثال ۲ : معادله دیفرانسیل انتگرالی زیر را حل کنید ؟

$$y''+y'=\cos t+\int y'(\lambda)\sin(t-\lambda)d\lambda \quad y'(0)=0 \text{ و } \quad y(0)=0$$

از طرفین معادله لاپلاس می گیریم .

---

[2] قضیه کانولوشن $\Leftarrow$ $\int y(\lambda)\sin 2(t-\lambda)d\lambda=y*\sin 2t$

[3] $l(y*\sin 2t)=Ly.L\sin 2t$

[4] $l^{-1}(\frac{a}{s^2+a^2})=\sin at$

$$ly'' + ly' = l\cos t + l(\int_0^t y'(\lambda)\sin(t-\lambda)d\lambda)$$

$$s^2 ly - sy(0) - y'(0) + sly - y(0) = \frac{s}{s^2+1} + l(y' * \sin t) \Rightarrow$$

$$s^2 ly - sly = \frac{s}{s^2+1} + ly'.l\sin t \Rightarrow$$

$$s^2 ly - sly = \frac{s}{s^2+1} + (sl(y) - y(0)).\frac{s}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$(s^2+s)l(y) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}ly \Rightarrow$$

$$(s^2+s-\frac{s}{s^2+1})ly = \frac{s}{s^2+1} \xRightarrow{\text{s ÷ طرفین}} (s+1-\frac{1}{s^2+1})ly = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$(\frac{s^3+s^2+s+1-1}{s^2+1})ly = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow l(y) = \frac{1}{s^3+s^2+s} \Rightarrow$$

$$y = l^{-1}(\frac{1}{s(s^2+s+1)})^{\circ}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^t e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}tdt^{6}$$

$$l^{-1}(\frac{1}{s}f(s)) = \int_0^t frdr$$ 5

$$f(r) = l^{-1}F(s)$$

$$t^{-1}(\frac{1}{s^2+s+1}) = l^{-1}(\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}) = e^{\frac{-t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$l^{-1}(\frac{1}{s^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}l^{-1}(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{s^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$ 6

$$l^{-1}(f(s-b)) = e^{bt}f(t), l(e^{bt}F(t)) = f(s-b)$$

مثال ۳ : معادله دیفرانسیل انتگرالی زیر را حل کنید :

$$y'(t)+2y+\int_0 y(\lambda)d\lambda=0 \qquad y(0)=1$$

$$ly'+l2y+l(\int_0 y(\lambda).1d\lambda=l(0)$$

$$sl(y)-y(0)+2ly+l(y*1)=0$$

$$sl(y)-1+2ly+l(y).l(1)=0\Rightarrow \qquad (s+2+\frac{1}{s})ly=1\Rightarrow$$

$$(\frac{s^2+2s+1}{s})ly=1\Rightarrow ly=\frac{s}{s^2+2s+1}=\frac{s}{(s+1)^2}$$

$$ly=(\frac{s+1-1}{(s+1)^2})\Rightarrow=\frac{s+1}{(s+1)^2}=\frac{1}{(s+1)^2}=\frac{1}{(s+1)}-\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$y=l^{-1}(\frac{1}{s+1})-l^{-1}(\frac{1}{(s+1)^2})=e^{-t}-te^{-t}=e^t(1-t)$$